

**Avertissement : ces notes ne sont qu'un outil de travail pour votre enseignant. Elles ne constituent pas un cours rédigé et peuvent contenir des erreurs.**

Marc Cheneau, Janvier 2020

## Rappels de physique statistique

### Description microscopique du problème

Un gaz quantique est un système constitué de  $N$  particules, a priori en interaction les unes avec les autres. Dans la suite de ce cours, nous noterons  $\lambda$  l'état d'une particule et  $\Lambda$  l'état du système total.

### Description classique

L'état d'une particule à un instant  $t$  est déterminé par la donnée de ses coordonnées dans l'espace des phases :  $\lambda = \{\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i\}$ . L'union de l'espace des phase de chaque particule constitue l'espace des phases du système total :  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ . La dimension de l'espace des phases total est ainsi égale à  $6N$ .

L'évolution temporelle du système est régie par la loi de Newton appliquée sur chaque particule  $i$  :

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) + \mathbf{F}_{\text{int}}(\{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\}_{j \neq i}),$$

où  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  représente la force exercée par les champs extérieurs sur la particule  $i$  et  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  la somme des forces d'interaction entre la particule  $i$  et les particules  $j \neq i$ .

Une autre formulation des équations de la dynamique, plus adaptée au passage vers la mécanique quantique, fait intervenir le hamiltonien  $H(\{\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j\})$  :

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} .$$

### Description quantique

L'espace des phases d'une particule unique prend la forme d'un espace de Hilbert. Si  $\{|\alpha\rangle\}$  forme une base de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_i$  d'une particule  $i$ , alors l'état de cette particule est déterminé par la donnée des nombres complexes  $c_\alpha$  :  $|\lambda_i\rangle = \sum_\alpha c_\alpha(\lambda_j)|\alpha\rangle$ . L'espace de Hilbert du système constitué de  $N$  particules est obtenu par produit tensoriel des espaces de Hilbert associés à chaque particule :

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N .$$

Ainsi, un état donné du système total s'écrit :

$$|\Lambda\rangle = |\lambda_1\rangle \otimes |\lambda_2\rangle \otimes \dots \otimes |\lambda_N\rangle = |\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N\rangle .$$

La dimension de cet espace composite est  $D^N$ , où  $D$  est la dimension de l'espace de Hilbert des particules individuelles. Le fait que la dimension de l'espace des phases du système quantique croisse exponentiellement avec  $N$ , et non linéairement comme pour un système classique, est lié à l'existence d'états **intriqués**.

L'évolution temporelle du système est régie par la l'équation de Schrödinger appliquée sur l'état du système total :

$$i\hbar \frac{d|\Lambda\rangle}{dt} = \hat{H}|\Lambda\rangle,$$

où  $\hat{H} = \hat{H}_{\text{ext}} + \hat{H}_{\text{int}}$  représente le hamiltonien du système, obtenu à partir du hamiltonien du problème classique équivalent par la procédure dite de *quantification canonique*.

## Description macroscopique

Les gaz quantiques contiennent un grand nombre de particules, typiquement de quelques centaines à quelques millions. Le nombre de degrés de libertés du système est donc astronomique et il est illusoire de chercher à décrire l'état du système par la donnée de l'état de chaque particule le constituant (= **microétat**, noté  $\Lambda$ ). On va plutôt chercher à décrire l'état du système à travers un petit nombre de variables **macroscopiques** (= **macroétat**) comme la pression, la température (= *variables intensives*) ou bien le nombre de particules ou l'énergie totale (= *variables extensives*). Un macroétat donné peut être réalisé par un nombre extrêmement grand de microétats. À l'inverse, un microétat est toujours associé à un macroétat particulier.

Le choix des variables macroscopiques n'est pas unique mais seul un petit nombre est nécessaire pour caractériser entièrement le macroétat du système. Les différentes variables macroscopiques sont liées entre elles par une **équation d'état**, comme celle du gaz monoatomique parfait classique :  $P = k_B TN/V$ , où  $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K est la constante de Boltzmann.

## Principe de Boltzmann

Le fondement de la physique statistique développée par Boltzmann réside dans l'observation qu'un système constitué d'un grand nombre de particules va constamment évoluer d'un microétat à un autre sous l'effet des interactions entre particules, ou entre les particules et les champs extérieurs, sur des échelles de temps bien plus courtes que celles sur lesquelles évoluent les variables macroscopiques. Cette évolution semble par ailleurs complètement erratique aux yeux d'un observateur «macroscopique». Ainsi les variables microscopiques vont être traitées comme des **variables aléatoires** et les variables macroscopiques vont être associées à des **moyennes** sur les variables microscopiques.

À ce stade il est nécessaire de préciser comment ces moyennes doivent être comprises. En pratique, toute mesure macroscopique réalisée sur le système

nécessite un certain **temps d'intégration**, pendant lequel le microétat du système évolue, mais pas son macroétat. Le macroétat mesuré résulte donc d'une **moyenne temporelle**. D'un point de vue formel par contre, le traitement des microétats comme des variables aléatoires implique l'introduction d'une **distribution de probabilité** pour les microétats, à partir de laquelle on peut calculer les valeurs moyennes. Cette distribution est alors comprise sur un **ensemble** de systèmes identiques. La description statistique nécessite donc de supposer que *moyenne temporelle* et *moyenne d'ensemble* sont confondues, ce que l'on appelle l'**hypothèse d'ergodicité**.

Une fois ce cadre conceptuel posée, toute la physique statistique est bâtie sur le principe extrêmement simple selon lequel tous les **microétats satisfaisant les contraintes extérieures éventuellement imposées au système sont équiprobables**.

*Remarque* : cette description statistique déjà présente en mécanique quantique car seules les valeurs moyennes des opérateurs sont prévisibles.

## Les ensembles canoniques

Suivant les contraintes extérieures imposées au systèmes, le principe de Boltzmann va conduire à différentes **distributions de probabilité** pour les microétats.

### Ensemble microcanonique

L'ensemble microcanonique correspond à un système isolé dont l'énergie et le nombre de particules sont fixés dans un intervalle  $[E - \Delta E; E + \Delta E]$ ,  $[N - \Delta N; N + \Delta N]$ . Le principe de Boltzmann conduit alors à attribuer la même probabilité d'occurrence à tous les microétats dont l'énergie et le nombre de particules sont compris dans ces intervalles. Si l'on note  $W(E, N; \Delta E, \Delta N)$  le nombre de ces états, on a alors :

$$\mathcal{P}_\Lambda = \frac{1}{W(E, N; \Delta E, \Delta N)},$$

expression qui réalise à la fois l'égalité des probabilités des microétats et la normalisation de la somme des probabilités :

$$\sum_{\Lambda} \mathcal{P}_\Lambda = 1,$$

où la somme inclut tous les microétats dont l'énergie et le nombre de particules satisfont les contraintes données plus haut.

Notons que le nombre  $W$  de microétats accessibles est utilisé pour définir l'**entropie statistique** :

$$S = k_B \ln(W).$$

Le fait que l'**entropie statistique** se confonde avec l'**entropie thermodynamique** fournisse donc une interprétation microscopique à cette quantité constitue l'une des grandes forces de la théorie de Boltzmann.

### Ensemble canonique

Dans l'ensemble canonique, le système est supposé pouvoir échanger de l'énergie avec un *bain* de dimension bien supérieure, c'est à dire dont l'état macroscopique ne dépend pas de la présence du système en considération. Le nombre de particules reste quant à lui fixé. On montre alors que la probabilité d'occurrence d'un microétat  $\Lambda$  est donné par :

$$\mathcal{P}_\Lambda = \frac{\exp(-\beta E_\Lambda)}{Z_C} \quad \text{avec} \quad \beta = 1/k_B T .$$

La température inverse  $\beta$  est ici définie par la relation :

$$\beta = \frac{1}{k_B} \frac{dS_B}{dE_B} ,$$

où  $S_B$  et  $E_B$  se réfèrent respectivement à l'entropie et à l'énergie du bain. Le facteur de normalisation

$$Z_C = \sum_{\Lambda} \exp(-\beta E_\Lambda)$$

est appelé **fonction de partition canonique**. Notons enfin que l'on peut réécrire la loi de probabilité des microétats sous la forme d'une dérivée de la fonction de partition :

$$\mathcal{P}_\Lambda = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(Z_C)}{\partial E_\Lambda} .$$

### Ensemble grand-canonique

Dans l'ensemble grand-canonique, le système peut maintenant échanger énergie et particules avec le bain. On a alors :

$$\mathcal{P}_\Lambda = \frac{1}{Z_{GC}} \exp(-\beta E_\Lambda + \alpha N_\Lambda)$$

avec

$$Z_{GC} = \sum_{\Lambda} \exp(-\beta E_\Lambda + \alpha N_\Lambda)$$

et

$$\alpha = \frac{\mu}{k_B T} .$$

Le facteur de normalisation  $Z_{GC}$  est appelé **fonction de partition grand-canonique**. Le potentiel chimique  $\mu$  est ici défini par la relation :

$$\alpha = -\frac{1}{k_B} \left. \frac{\partial S_B}{\partial N_B} \right|_{E_B} .$$

Là encore, nous pouvons réécrire la loi de probabilité comme une dérivée de la fonction de partition :

$$\mathcal{P}_\Lambda = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(Z_{GC})}{\partial E_\Lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \ln(Z_{GC})}{\partial N_\Lambda} .$$

### Utilité de la fonction de partition

Comme nous l'avons vu précédemment, les lois de probabilités pour les microétats peuvent être écrites comme des dérivées des fonctions de partition. Cette propriété concerne en fait toutes les quantités macroscopiques du système.

Ainsi l'énergie moyenne peut être dérivée de la manière suivante :

$$\langle E \rangle \equiv \sum_\Lambda E_\Lambda \mathcal{P}_\Lambda = \frac{1}{Z_{GC}} \sum_\Lambda E_\Lambda \exp(-\beta E_\Lambda + \alpha N_\Lambda) ,$$

d'où :

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z_{GC}} \sum_\Lambda -\frac{\partial}{\partial \beta} \exp(-\beta E_\Lambda + \alpha N_\Lambda) \Big|_\alpha = - \frac{\partial \ln(Z_{GC})}{\partial \beta} \Big|_\alpha .$$

Similairement, on obtient pour le nombre de particules total :

$$\langle N \rangle = \frac{\partial \ln(Z_{GC})}{\partial \alpha} \Big|_\beta .$$

## Systèmes constitués de particules indiscernables

### Dénombrement des microétats

Telle que nous l'avons donnée, la définition du microétat d'un système composé de  $N$  particules repose sur la possibilité d'attribuer un indice distinct à chaque particule. Lorsque les particules sont indiscernables, cette n'est plus possible car la permutation de deux particules conduit à une même réalité physique. Ainsi, dans la somme sur les microétats définissant la fonction de partition, on doit prendre garde à n'inclure que les microétats *physiquement distincts*, c'est-à-dire correspondant à une liste *ordonnée* d'états à une particule.

Ce qui compte, finalement, c'est le nombre moyen de particules que l'on va trouver dans un état donné,  $\langle N_\lambda \rangle$ , appelé aussi **nombre d'occupation**, avec lequel on calculera la valeur moyenne de n'importe quelle quantité  $O$  selon :

$$\langle O \rangle = \sum_\lambda \langle N_\lambda \rangle O_\lambda ,$$

où  $O_\lambda$  est la valeur moyenne de la quantité  $O$  dans l'état à une particule  $\lambda$ .

Dans une description classique de l'état du système, on remplacera généralement le nombre moyen de particules occupant un état  $\lambda$  par le nombre moyen de particules occupant un volume élémentaire de l'espace des phases :

$$\langle N_\lambda \rangle \rightarrow \frac{d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}}{2\pi\hbar^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) ,$$

où  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  est la **fonction de distribution**.

### Bosons et fermions

Dans le cadre de la physique quantique, la permutation de deux particules conduit à une même réalité physique si et seulement si l'état du système reste inchangé à **une phase près** par cette transformation. Puisque la répétition de la permutation doit ramener l'état à sa valeur initiale, la phase globale induite par une permutation ne peut prendre que les valeurs 0 ou  $\pi$ . On montre en théorie quantique des champs que la phase 0 est obtenue pour les particules de spin entier, appelées bosons, et la phase  $\pi$  est obtenue pour les particules de spin demi-entier, appelées fermions.

La propriété d'antisymétrie par échange de particule des systèmes composés de fermions indiscernables a en outre pour conséquence l'impossibilité pour deux fermions d'occuper le même état quantique, car il faudrait alors que l'état du système total soit égal à son opposé. Il s'agit là du **principe d'exclusion de Pauli**.

### Base des états de Fock

La prise en compte de la symétrie des microétats peut être faite directement dans le choix de la base pour l'espace de Hilbert du système total. On introduit ainsi les états de Fock  $|\Lambda\rangle = |N_0, N_1, N_2, \dots\rangle$  représentant les microétats avec  $N_0$  particules dans l'état  $\lambda_0$ ,  $N_1$  particules dans l'état  $\lambda_1$ , etc. L'ensemble des états de Fock pour tous les nombres d'occupation constitue une base de la partie *physique* de l'espace de Hilbert total.

Pour des particules bosoniques, les nombres d'occupation peuvent prendre n'importe quelle valeur entière positive ou nulle. Pour les particules fermioniques en revanche, les nombre d'occupation ne peuvent valoir que 0 ou 1.

### Le gaz idéal classique

Nous considérons ici un gaz idéal constitué de particules indiscernables. L'énergie totale du système dans un microétat  $\Lambda$  et contenant  $N_\Lambda$  particules est ainsi la somme des énergies des particules :

$$E_{\Lambda, N_\Lambda} = \sum_{j=1}^{N_\Lambda} \varepsilon_{\lambda_j} .$$

Nous calculons ici à titre d'exemple les nombres d'occupation moyens dans dans la limite classique, qui correspond en fait à de faibles nombres d'occupation moyens,  $\langle N_\lambda \rangle \ll 1$ . Nous reviendrons sur le pourquoi de ce lien entre les nombre d'occupation moyens et le caractère classique ou quantique à la fin de ce cours.

### Ensemble canonique

Nous nous plaçons ici dans l'ensemble canonique et fixons le nombre de particules total dans le système à  $N$ .

On commence par écrire la fonction de partition du système total :

$$Z_c = \sum_{\Lambda} \{ \lambda_j \} \exp(-\beta E_\Lambda) .$$

Puisque l'on considère des particules indiscernables, il faut prendre garde à ne pas compter plusieurs fois les microétats que ne diffèrent que par des permutations des indices des particules. Dans un gaz classique, la probabilité de trouver deux particules dans un même état est par définition très faible. Pour éviter les doubles comptages, il suffit donc de normaliser la somme par le nombre de permutations possibles, à savoir  $N!$ . On obtiens alors :

$$Z_c = \frac{1}{N!} \sum_{\{ \lambda_j \}} \exp \left( -\beta \sum_{j=1}^N \varepsilon_{\lambda_j} \right) = \frac{1}{N!} \prod_{j=1}^N \sum_{\lambda_j} \exp(-\beta \varepsilon_{\lambda_j}) .$$

En remarquant que l'indice  $j$  est en réalité muet puisque la somme sur les états à une particule est indépendante de la particule considérée, on obtient finalement

$$Z_c = \frac{Z_1^N}{N!} ,$$

où l'on a introduit la fonction de partition d'un système *constitué d'une seule particule* :

$$Z_1 = \sum_{\lambda} \exp(-\beta \varepsilon_{\lambda}) .$$

Puisque les particules sont indépendantes (sans interactions), les nombres moyens d'occupation  $\langle N_\lambda \rangle$  sont égaux à  $N$  fois la probabilité pour une particule de se trouver dans l'état  $\lambda$  :

$$\langle N_\lambda \rangle = N \frac{\exp(-\beta \varepsilon_{\lambda})}{Z_1} .$$

Cette loi est appelée **distribution de Boltzmann**.

### Ensemble grand-canonique

On commence par écrire la fonction de partition du système total :

$$Z_{GC} = \sum_{\Lambda} \exp(-\beta E_\Lambda + \alpha N_\Lambda) = \sum_N \left[ \sum_{\Lambda, N_\Lambda=N} \exp(-\beta E_\Lambda) \right] \exp(\alpha N) .$$

La somme sur  $\Lambda$  à  $N_\Lambda$  fixé correspond à la fonction de partition canonique  $Z_C$ . Il vient ainsi directement :

$$Z_{GC} = \sum_N \frac{Z_1^N}{N!} \exp(\alpha N) = \exp(e^\alpha Z_1).$$

À partir de la fonction de partition grand-canonique, il est possible de calculer le nombre de particules moyen dans le système, ainsi que les nombres d'occupation moyens des états  $\lambda$ . Ainsi, en rappelant que

$$\langle N \rangle = \left. \frac{\partial \ln(Z_{GC})}{\partial \alpha} \right|_\beta,$$

on trouve :

$$\langle N \rangle = e^\alpha Z_1.$$

Pour calculer la distribution des nombres d'occupations, le plus simple est d'utiliser la relation obtenue ci-dessus en remplaçant  $\langle N \rangle$  par  $\sum_\lambda \langle N_\lambda \rangle$ . Il vient ainsi :

$$\sum_\lambda \langle N_\lambda \rangle = e^\alpha Z_1 = e^\alpha \sum_\lambda \exp(-\beta \varepsilon_\lambda).$$

Comme  $\langle N_\lambda \rangle$  ne peut dépendre que de  $\varepsilon_\lambda$ , il vient finalement :

$$\langle N_\lambda \rangle = e^\alpha \exp(-\beta \varepsilon_\lambda) = \langle N \rangle \frac{\exp(-\beta \varepsilon_\lambda)}{Z_1}.$$

Cette loi est appelée **distribution de Gibbs**.

## Le gaz idéal quantique

Les particules n'interagissant pas les unes avec les autres, l'énergie d'un état de Fock  $|\Lambda\rangle = |N_1, N_2, \dots\rangle$  est donné par  $E_\Lambda = \sum_\lambda N_\lambda \varepsilon_\lambda$ . De même le nombre total de particules s'écrit  $N_\Lambda = \sum_\lambda N_\lambda$ .

À partir de là, la fonction de partition dans l'ensemble grand-canonique prend la forme :

$$Z_{GC} = \sum_\Lambda \exp[-\beta(E_\Lambda - \mu N_\Lambda)] = \sum_{N_1, N_2, \dots} \exp\left[-\sum_\lambda \beta(\varepsilon_\lambda - \mu) N_\lambda\right] = \prod_\lambda \sum_{N_\lambda} \exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu) N_\lambda].$$

La contribution des différents états à une particule  $\lambda$  peut donc être factorisée pour obtenir

$$Z_{GC} = \prod_\lambda Z_\lambda \quad \text{avec} \quad Z_\lambda = \sum_{N_\lambda} \exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu) N_\lambda].$$



### Gaz de Bosons

Pour un gaz de bosons, les nombres d'occupation  $N_\lambda$  peuvent prendre toute valeur entière positive. On peut alors reconnaître dans l'expression de  $Z_\lambda$  un développement en série de Taylor et écrire de manière plus explicite :

$$Z_{\text{GC}} = \prod_{\lambda} Z_{\lambda} \quad \text{avec} \quad Z_{\lambda} = \frac{1}{1 - \exp[-\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)]}.$$

Le nombre d'occupation moyen d'un état  $\lambda$  peut être calculé à partir de l'expression de la fonction de partition :

$$\langle N_{\lambda} \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(Z_{\text{GC}})}{\partial \varepsilon_{\lambda}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(Z_{\lambda})}{\partial \varepsilon_{\lambda}} = \frac{\exp[-\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)]}{1 - \exp[-\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)]}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par  $\exp[\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)]$  nous obtenons les nombres d'occupation moyens

$$\langle N_{\lambda} \rangle = \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)] - 1}.$$

Cette loi est appelée **distribution de Bose–Einstein**.

Notons que cette distribution n'a de sens que si  $\langle N_{\lambda} \rangle \geq 0$ , ce qui nécessite  $\mu < \varepsilon_0$ . Notons également que le nombre moyen de particules dans un état  $\lambda$  peut prendre n'importe quelle valeur réelle positive.

### Gaz de fermions

Pour un gaz de fermions, les nombres d'occupation  $N_\lambda$  ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. On a alors

$$Z_{\text{GC}} = \prod_{\lambda} Z_{\lambda} \quad \text{avec} \quad Z_{\lambda} = 1 + \exp[-\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)].$$

On calcule de la même manière que précédemment le nombre moyen de particules dans un état  $\lambda$ :

$$\langle N_{\lambda} \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(Z_{\text{GC}})}{\partial \varepsilon_{\lambda}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(Z_{\lambda})}{\partial \varepsilon_{\lambda}} = \frac{\exp[-\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)]}{1 + \exp[-\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)]}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par  $\exp[\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)]$  nous obtenons les nombres d'occupation moyens

$$\langle N_{\lambda} \rangle = \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)] + 1}.$$

Cette loi est appelée **distribution de Fermi–Dirac**.

Ici le potentiel chimique peut prendre n'importe quelle valeur réelle positive et  $\langle N_{\lambda} \rangle$  est compris en 0 et 1 comme il se doit.

### Limite classique

Les distributions de Bose–Einstein et de Fermi–Dirac deviennent indifférenciables à la limite des petits nombres d’occupation,  $\langle N_\lambda \rangle \ll 1$ , ce qui correspond à  $\varepsilon_\lambda - \mu \gg k_B T$ , et a fortiori si  $\varepsilon_0 - \mu \gg k_B T$ , où  $\varepsilon_0$  désigne l’énergie de l’état fondamental. Elles se confondent alors avec la distribution de Gibbs :

$$\langle N_\lambda \rangle = \exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)] .$$

Inversement, lorsque plusieurs particules peuvent occuper un même état quantique, la distinction entre bosons et fermions devient essentielle.

### Longueur d’onde de Broglie

Considérons de nouveau l’expression du nombre d’occupation moyen pour un système classique :

$$\langle N_\lambda \rangle = \langle N \rangle \frac{\exp(-\beta\varepsilon_\lambda)}{Z_1} .$$

On constate que les nombres d’occupation moyen de tous les états à une particule  $\lambda$  seront petits si  $\langle N \rangle \ll Z_1$

À la limite continue, la fonction de partition à 1 corps prends la forme :

$$Z_1 = \int \frac{d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \exp(-\beta \mathbf{p}^2/2m) = V \times \left( \frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} ,$$

où  $V$  est le volume accessible au système.

En définissant  $\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$ , on obtient que les nombres d’occupation moyens seront petits si

$$\frac{\langle N \rangle}{V} \ll \frac{1}{\lambda_T^3} ,$$

c’est-à dire si la densité de particules est petite devant  $1/\lambda_T^3$ . Dans le cas contraire, le gaz doit être traité comme quantique, avec une distinction entre bosons et fermions.

La longueur  $\lambda_T$  est appelée **longueur d’onde de de Broglie thermique** et peut être comprise comme la largeur du paquet d’onde associée à une distribution de vitesse thermique, de largeur  $\Delta v \sim \sqrt{k_B T/m}$ .